

Algèbre I – Licence 3^e année

UNIVERSITE PARIS DIDEROT

3 h cours magistral + 4,5 h Travaux Dirigés

Maîtrise des structures essentielles en algèbre générale, notamment en théorie des groupes et des anneaux.

1. Relations d'équivalence, classes d'équivalence, passage au quotient d'une application.
2. Groupes, sous-groupes, morphismes de groupes, générateurs d'un groupe, groupes monogènes, sous-groupes distingués, groupes quotients, groupes opérant sur un ensemble, exemples, stabilisateurs, orbites. Espaces affines. Groupes symétriques, groupes alternés. Groupes commutatifs finis.
3. Anneaux, morphismes d'anneaux, idéaux, anneaux quotients, éléments inversibles, éléments irréductibles. Idéaux maximaux, corps, anneaux principaux, anneaux $K[X]$. Corps des fractions d'un anneau intègre.

Algèbre – Licence 3^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignants : A.Minguez & M. Carpentier

24h de cours + 38h30 de travaux dirigés

- Groupes, anneaux, corps. Exemples tirés de l'arithmétique et de la géométrie. Homomorphismes et passage au quotient. Groupe symétrique. Structure des groupes abéliens finis. Action d'un groupe sur un ensemble. Théorèmes de Sylow. Produits semidirects.

Algèbre linéaire 2, espaces affines – Licence 2^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignante : Anna Cadoret

24 heures de cours magistraux + 38,5 heures de travaux dirigés (TD)

- Dualité : Espace dual, notion de base duale, orthogonal d'un sous-espace dans son dual. Dualité entre base d'un sous-espace et équation d'un sous-espace.
- Espaces affines : Notion d'espace affine, de repère, d'application affine. Exemples fondamentaux, en particulier, équations avec second membre. Barycentres.
- Déterminant : Applications multilinéaires. Etude du groupe symétrique, signature d'une permutation. Définition et propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un endomorphisme.
- Réduction des endomorphismes : Polynôme caractéristique, valeurs et vecteurs propres. Diagonalisation, trigonalisation. Polynômes d'endomorphismes et leur utilisation pour la réduction des endomorphismes. En particulier : décomposition en espaces caractéristiques. Applications.

Analyse appliquée – Licence 3^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignante : J.-P. Françoise

12 heures de cours + 19h15 heures de travaux pratiques

- Théorème du point fixe des applications contractantes
- Théorème de la convergence quadratique
- Méthode de Newton
- Théorème de Kantorovich
- Applications à des méthodes itératives

Analyse Numérique Matricielle – Licence 3^e année

UNIVERSITE PARIS DIDEROT

3 h Cours magistral + 4,5 h Travaux Dirigés

A/ Rappels et compléments d'algèbre linéaire

1. Polynôme annulateur, polynôme minimal, polynôme caractéristique
2. valeurs propres, sous-espaces caractéristiques, diagonalisation, triangularisation.
3. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
4. Matrices unitaires, normales, symétriques, hermitiennes.

B/ Analyse matricielle

1. Normes dans \mathbb{K}^n , les normes l_p . Normes matricielles, normes subordonnées. Valeurs singulières d'une matrice. Norme de Frobenius. Matrices hermitiennes : quotient de Rayleigh. Rayon spectral d'une matrice. Suite des puissances d'une matrice.
2. Méthodes directes pour les systèmes linéaires : élimination de Gauss. Factorisation LU, unicité. Condition nécessaire et suffisante d'existence. Aspects algorithmiques. Méthode de Gauss avec pivot. Factorisation $A = LU$. Factorisation de Choleski. Factorisation QR. Problèmes de moindres carrés.
3. Méthodes itératives pour les systèmes linéaires : méthodes stationnaires, de Jacobi, de Gauss Seidel, de sur relaxation. Méthodes par blocs. Méthodes des directions alternées. Méthodes de descente : Gradient à pas fixe. Gradient à pas optimal. Gradient conjugué. Méthodes de résidu minimal.
4. Si le temps le permet : méthodes de calcul des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice : Méthodes de la puissance et de la puissance inverse. Méthode QR. Méthode de Jacobi.

Approximation numérique des fonctions – Licence 3^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignant : M. Campos Pinto

24h de cours + 26h15 de travaux dirigés + 12h15 de travaux pratiques

Objectif : Familiariser les étudiants avec quelques notions simples d'analyse numérique, les préparer à des cours plus avancés dans ce domaine.

- Résolution des équations (méthode du point fixe, méthode de Newton et de NewtonRaphson)
- Approximation des fonctions (Théorème de Weierstrass, de Jackson, polynômes de Bernstein, ...)
- Approximation des intégrales (Quadratures simples et composées, noyau de Peano, points de Gauss-Legendre, ...)
- Rappel d'algèbre matricielle

Calcul intégral – Licence 3^e année

UNIVERSITE PARIS DIDEROT

2 h Cours magistral + 3 h Travaux Dirigés

Maîtriser les fondements théoriques et la pratique de l'intégrale de Lebesgue : théorie de la mesure, intégrale d'une fonction mesurable positive, puis intégrable. Connaître les conditions d'inversion d'une limite et d'une intégrale, ou de deux intégrales (Fubini).

A/ Espaces mesurés

1. Tribu, mesure (positive), mesurabilité,
2. Mesure de Lebesgue dans \mathbb{R} (existence admise), mesure de comptage, Classe monotone, application à l'unicité des mesures.
3. Mesure image.
4. Tribu engendrée par un ensemble de parties, par une fonction.

B/ Intégrales

1. Intégrale d'une fonction réelle mesurable par rapport à une mesure, intégrabilité.
2. Théorème de convergence monotone, lemme de Fatou, théorème de convergence dominée.
3. Comparaison des intégrales de Riemann et de Lebesgue.
4. Intégrale à paramètre (continuité, dérivabilité).

C/ Espaces produits

1. Tribu produit, mesure produit, exemple de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^d .
2. Fubini (positif et général), 3. Changement de variable différentiable dans \mathbb{R}^d .

Calcul vectoriel et intégrales multiples – Licence 2^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignants : Frédéric Paugam & Frédéric Le Roux

24h de Cours + 38,5h de Travaux Dirigés (TD)

- Calcul différentiel et intégral pour les fonctions d'une et plusieurs variables.
- Courbes, surfaces et volumes paramétrés.
- Champs de vecteurs et formes différentielles.
- Gradient, rotationnel, divergence.
- Intégrale des formes différentielles. Travail, flux.
- Formule de Stokes et applications.

Espaces vectoriels euclidiens et hermitiens, isométries affines – Licence 2^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignant : Adnene Ben Abdeselem

24 heures de cours magistraux + 38,5 heures de travaux dirigés (TD)

- Formes bilinéaires et quadratiques : étude et classification.
- Espaces vectoriels euclidiens : notion de produit scalaire, norme, sous-espace orthogonal, inégalité de Cauchy Schwarz, procédé de Gram-Schmidt, théorème de Sylvester dans le cas réel (diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints).
- Isométries vectorielles : classification en dimension 2 et 3.
- Espaces affines euclidiens et étude des isométries affines : classification en dimension 2 et 3. Formes hermitiennes et théorème de Sylvester.

Fonctions de plusieurs variables, analyse vectorielle, intégrales multiples – Licence 2^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignant : Jean-François Babadjian

24 heures de cours magistraux + 36 heures de travaux dirigés

- Notions de topologie dans \mathbb{R}^n : normes, boules, suites, ouverts, fermés, compacts, connexe
- Fonctions continues : définitions en un point, séquentielle et topologique, polynômes, fonctions Lipschitziennes, applications linéaires
- Différentiabilité et dérivées partielles : gradient, matrice jacobienne, fonctions de classe C^1
- Dérivées partielles d'ordre supérieur : matrice hessienne, théorème de Schwartz, formule de Taylor, fonctions de classe C^k
- Courbes/nappes paramétrées et surfaces : vecteur/plan tangent

Graphes et combinatoire – Licence 2^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignant : Arnau Padrol

24h de Cours + 36h de Travaux Dirigés (TD)

- Combinatoire énumérative : Cardinal d'un ensemble, dénombrabilité, principes de dénombrement, principe des tiroirs, coefficients binomiaux, formule du crible, fonctions génératrices
- Théorie des graphes : Graphes simples, isomorphismes, connexité, arbres, graphes bipartis, coloration, graphes eulériens

Intégration et théorie de la mesure – Licence 3^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignants : F. Bolley & R. Dujardin

24h de cours + 38h30 de travaux dirigés

- Nous commencerons par définir les objets de la théorie de la mesure : tribus, fonctions mesurables, mesures. Nous construirons ensuite l'intégrale de Lebesgue et démontrerons sa propriété fondamentale, qui est le théorème de convergence monotone. Nous tirerons les conséquences classiques de ce théorème : lemme de Fatou et théorème de convergence dominée. Nous appliquerons ces résultats à l'étude de la régularité des intégrales dépendant d'un paramètre. Nous étudierons ensuite les tribus produits et les mesures produit, et démontrerons le théorème de Fubini. Enfin, nous étudierons la notion de mesure image et établirons un théorème de changement de variables.

Introduction à l'arithmétique – Licence 2^e année

UNIVERSITE PARIS DIDEROT

2 h Cours magistral + 3 h Travaux dirigés

Objectifs : Maîtrise de structures essentielles de l'arithmétique et de ses applications fondamentales notamment en cryptographie. Les notions abordées, fondamentales en mathématiques, apparaissent dans divers concours de recrutement.

Programme :

1. Groupes cycliques et leurs sous-groupes.
2. Arithmétique dans \mathbb{Z} ; division euclidienne, pgcd et ppcm, formule de Bézout, factorisation en nombres premiers.
3. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, groupe des inversibles, indicateur d'Euler, lemme chinois, corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
4. Algorithme RSA.

Introduction à la logique mathématique – Licence 2^e année

UNIVERSITE PARIS DIDEROT

2 h Cours magistral + 3 h Travaux dirigés

1. Analyse du discours mathématique

Le langage du calcul des prédicats et la notion de structure sont introduits à partir d'exemples.

- Analyse du langage mathématique usuel ; expressions mathématiques, noms et énoncés ; variables, constantes ; connecteurs ; signes lieurs, quantificateurs ; quantification relativisée, quantificateurs liés à l'égalité (« il existe au plus un .. », « il existe un unique ... »). Définition, axiome, théorème, propriété, lemme, corollaire, ... Exemples de formalisation.
 - Usage des connecteurs et quantificateurs : équivalences classiques, règles d'inférence.
 - Exemples de structures et de théories ; distinction entre premier et second ordre ; arithmétique (récurrence).
2. Opérations ensemblistes
Opérations booléennes sur les ensembles, inclusion, propriétés, lien avec le calcul propositionnel ; produit cartésien, relations, fonctions ; familles indexées d'ensembles et de fonctions et opérations sur celles-ci (intersection et réunion infinies, ...).

3. Introduction à la cardinalité

Définition (ensembles en bijection) ; cardinalité finie : principe des tiroirs et variantes ; cardinalité infinie : ensembles dénombrables, \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont dénombrables ; méthode diagonale \mathbb{R} n'est pas dénombrable (le théorème de Cantor-Bernstein peut être admis).

4. Calcul propositionnel

Définition inductive de l'ensemble des formules propositionnelles ; définition et démonstration par induction sur l'ensemble des formules ; définition de la satisfaction. Tautologies, conséquence sémantique. Méthode de réfutation (approche non formelle). Formes normales disjonctives et conjonctives ; systèmes complets. Formalisation en calcul propositionnel. Étude d'un système de déduction (au choix) : correction et complétude (cas dénombrable). Compacité.

Probabilités élémentaires – Licence 3^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignant : Amaury Lambert

24h de cours + 38h30 de travaux dirigés

- Chapitre 1 : un peu de théorie des ensembles
- Chapitre 2 : probabilités et variables aléatoires discrètes
- Chapitre 3 : probabilité conditionnelle, indépendance, théorème de Borel–Cantelli
- Chapitre 4 : loi d'une variable aléatoire réelle
- Chapitre 5 : moments d'une variable aléatoire réelle, inégalités classiques
- Chapitre 6 : caractérisation de la loi d'une v.a.
- Chapitre 7 : variables aléatoires indépendantes, produit de convolution
- Chapitre 8 : vecteurs aléatoires, covariance, espérance et loi conditionnelles
- Chapitre 9 : convergence presque sûre, en probabilité, dans L^1
- Chapitre 10 : convergence en loi
- Chapitre 11 : loi forte des grands nombres, théorème central limite

Séries, Intégrales – Licence 2^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignant : Adnene Ben Abdeselem

24h de Cours + 38,5h de Travaux Dirigés (TD)

- Séries numériques,
- Critères de convergence de séries, intégrales généralisées (c'est à dire d'une fonction présentant des points de discontinuité ou sur un intervalle non-borné),
- Critères de convergence des intégrales généralisées,
- Comparaison séries-intégrales,
- Critères de convergence,
- Continuité et dérivabilité des séries de fonctions, séries entières et applications, séries de Fourier (calcul des coefficients et critères de convergence des séries de Fourier).

Suites, séries et intégrales – Licence 2^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignants : Sophie Chemla & David Sinnou

24 heures de cours magistraux + 38,5 heures de travaux dirigés (TD)

- Logique, quantificateurs
- Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures
- Etude des suites numériques réelles (convergence, suites adjacentes, suites extraites, théorème de Bolzano-Weierstrass, critères de Cauchy) et complexes.

- Séries numériques réelles et complexes (convergence, critère de Cauchy, absolue convergence, transformation d'Abel et théorème d'Abel).
- Intégrale de Riemann (construction, intégrabilité des fonctions continues par morceaux, intégrales et primitives, intégration par parties, changements de variables, intégration des fractions rationnelles)
- Intégrales généralisées (théorèmes de comparaison dans le cas des fonctions positives, absolue convergence).
- Suites de fonctions (convergence simple et uniforme, théorème de continuité, dérivabilité et intégration)

Topologie et calcul différentiel – Licence 3^e année

SORBONNE UNIVERSITE – CAMPUS PIERRE ET MARIE CURIE

Enseignants : A. Jordan & P. Le Calvez & D. Smets

36h de cours + 57h45 de travaux dirigés

- Topologie des espaces métriques : espaces métriques, complétude, compacité, connexité, espaces vectoriels normés
- Calcul différentiel : dérivées partielles et différentielle, fonctions implicites et inversion locale, dérivées partielles d'ordre supérieur